$F : \mathbb{Q}_p^n \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable

$$\mathcal{F}(F)(y) = \int_{x\in\mathbb{Q}_p^n} F(x)\cdot\psi(x\cdot y)\,|dx|$$

$$(\mathbb{Q}_p^n,+)^{\mathrm{dual}} = \mathbb{Q}_p^n$$

$y \in \mathbb{Q}_p^n$

$y\cdot x = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$(x \mapsto \psi(x\cdot y)) \in (\mathbb{Q}_p^n,+)^{\mathrm{dual}} \longleftrightarrow y \in \mathbb{Q}_p^n$

$$C(X) \sim C^{\exp}(X)$$

$C^{\exp}(X)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre

générée par $C(X)$

et $x \longmapsto \psi(f(x))$

avec $f : X \to \mathbb{Q}_p$ définissable

$$F \in C^{\exp}(X)$$

$$F = \sum_i \left(\prod_j |f_{ij}|\right)\cdot(\mathrm{ord}\, g_{ij})\cdot \psi(h_{ij})$$

$$\frac{|f_1| \cdot |f_2|}{|f_1 f_2|} \qquad \frac{\psi(h_1)\,\psi(h_2)}{\psi(h_1+h_2)}$$

Thm Stabilité pour $\mathcal{C}^{exp}$.

donné $F \in \mathcal{C}^{exp}(X \times \mathbb{Q}_p^n)$

il existe $G \in \mathcal{C}^{exp}(X)$ t.q.

$$G(x) = \int_{y \in \mathbb{Q}_p^n} F(x,y)\,|dy|$$

pour x avec $y \mapsto F(x,y)$ est intégrable.

Corollaire $F \in \mathcal{C}^{exp}(\mathbb{Q}_p^n)$, intég

alors $\mathcal{F}(F) \in \mathcal{C}^{exp}(\mathbb{Q}_p^n)$

esquisse de preuve :

cas monomiale (réduction $\langle$ cellules + contrôle entre de l'argument de $\psi(\dots)$

$$\int |x| \cdot \psi(x) \, |dx|$$

$$-2 \leq \mathrm{ord}(x) \leq b \qquad b \geqslant 0$$

$$= \int_{\mathrm{ord}(x)=-2} |x|\,\psi(x) + \int_{\mathrm{ord}(x)=-1} |x|\,\psi(x)$$

$$+ \sum_{i \geqslant 0}^{b} \int_{\mathrm{ord}\,x=i} |x|\,\psi(x)$$

$\psi(x) = \psi(0)$

$0 = x' \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$

$(x'-x) \in \mathbb{Z}_p$

$$\sum_{i \geqslant 0}^{b} \int_{\mathrm{ord}\,x=i} |x|$$

OK même © (autre voir)

$$\int_{\mathrm{ord}\,x=-2} |x|\,\psi(x) = p^2 \int_{\mathrm{ord}\,x=-2} \psi(x)$$

$$\int_{\mathrm{ord}\,x=-2} \psi(x) = \sum_{\substack{a_{-2}=1,\dots,p-1 \\ a_{-1}=0,\dots,p-1}} \int_{x} \psi(x)$$

$$x = a_{-2}p^{-2} + a_{-1}p^{-1} + y \qquad y \in \mathbb{Z}_p$$

$$\sum_{a_{-2}} \left(\sum_{a_{-1} \in \mathbb{F}_p} \underbrace{\int_{x \in \underline{a_{-2}p^{-2}} + a_{-1}p^{-1} + \mathbb{Z}_p} \psi(x)}_{\substack{\| \\ 0}} \right)$$

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{a_{-2}}{p^2} + \frac{a_{-1}}{p}\right)$$

$$0 = \sum_{a_{-1}=0}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{a_{-1}}{p}\right)$$

$$\int_{\operatorname{ord} x = -1} \psi(x) = \sum_{a_{-1}=1}^{p-1} \int_{x \in a_{-1}p^{-1} + \mathbb{Z}_p} \psi(x)$$

$$= \underbrace{\sum_{a_{-1}=0}^{p-1} c \cdot \psi\left(\frac{a_{-1}}{p}\right)}_{\| \\ 0} \cancel{=} \; \underline{-}\, c \cdot \psi(0)$$

$$= -c\,\psi(0) = -c = -1 \qquad c = 1$$

$$\int_{\substack{y \in \mathbb{Q}_p \\ |a(x)| < |y| < |b(x)|}} \psi(y) \cdot \sum_i T_i(x,y) \cdot |dy|$$

$$T_i = |y|^{\alpha_i} (\operatorname{ord} y)^{\beta_i} \, c_i(x)$$

Cas monomiales générale.

$$C_i \in \mathcal{C}^{\exp}(X)$$

pourquoi utile ?

Certaines intégrales sont clairement fonction de la classe C ou $C^{\exp}$.

Beaucoup de fonction de C ou $C^{\exp}$ apparaîssent dans le programme de Langlands

Puis souvent on manipule ces fonctions, F, on intègre p.r.à qq. var.

On reste dans les classes C et $C^{\exp}$.

Résultat qualitatif pour les classes de classes C et $C^{\exp}$

p.e. si $F \in C^{\exp}(\mathbb{Q}_p)$

si $F(y) \to 0$ pour $|y| \to \infty$

alors $|F(y)|_{\mathbb{C}} < c\,|y|^{-\varepsilon}$ pour $|y|$ grand.

$\varepsilon > 0$

$c \in \mathbb{R}_{>0}$

Clés pour application.

version uniformes en p de $C^{\exp}$ et C.

$\left(C^{\exp}_{\mathbb{Q}_p}\right)_p$ primes

$\longrightarrow \mathbb{F}_p((t))$ p grand.

$\left(|f|_p\right)_p$

f polynôme

$\left(C^{\exp}_{\mathbb{Q}_p,\, \mathbb{F}_p((t))}\right)$ p grand.

$\mathbb{Q}_p \longleftrightarrow \mathbb{F}_p((t))$

Ngô

$\int \ldots = \int \ldots$

lemme fond.

$\mathbb{Q}_p$, p grand.

$\int \ldots = \int \ldots$

$C^{\exp}$ uniform

---

rationalité

$\int_{\mathbb{Z}_p^n} |f|^s$ " $=$ " $\dfrac{p(q^{-s})}{q(q^{-s})}$ $\longleftrightarrow$ rat. pour $\mathbb{F}_p((t))$

version uniforme de $\mathbb{C}^{\exp}$, $\mathbb{C}^{r\text{ grand}}$

→ intégration motivique.

plus formelle
plus géométrique

$\mathbb{C}((t))$

interpole le cas $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{F}_p((t))$ uniforme

FIN.